ПРИКЛАДНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

УДК 517.956.35 DOI: 10.30758/0555-2648-2018-64-3-337-343

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОРОУПРУГОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВОДА–ЛЕД

П.В. КОРОБОВ

ГНЦ РФ Арктический и антарктический научно-исследовательский институт, Санкт-Петербург, Россия

pkor@aari.ru

NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR THE ONE-DIMENSIONAL EQUATIONS OF POROELASTICITY FOR THE WATER–ICE SYSTEM

P.V. KOROBOV

State Scientific Center of the Russian Federation Arctic and Antarctic Research Institute, St. Petersburg, Russia

pkor@aari.ru

Received May, 14, 2018 *Accepted August, 6, 2018*

Keywords: finite-difference scheme, hyperbolic system, porous media, the coefficient of friction.

Summary

This article is devoted to the problem of propagation of elastic transverse oscillations in a two-phase medium consisting of water and ice (ice impregnated with water). If we consider ice as a kind of porous homogeneous medium with constant partial density, then it becomes possible to apply the problems of the theory of filtration to the water-ice medium. In this paper, we consider one of the possible formulations of the direct problem modeling the propagation of a signal in this medium is considered. The initial-boundary value problem for a one-dimensional nonlinear system of poroelasticity equations is solved by numerical method on the basis of an explicit-difference scheme. A series of numerical calculations for a trial model of the media is presented.

The aim of the paper is to describe the approach to the study of water-ice media using the equations of filtration theory. The object of the study is the propagation of wave oscillations in such media. Such fluctuations can have different nature (seismic, acoustic, etc.). For example, it is of interest to use this approach to model the propagation of sea waves in the ice of the initial stage of ice formation.

Citation: *Korobov P.V.* Numerical implementation of the initial-boundary value problem for nonlinear the one-dimensional equations of poroelasticity for the water-ice system *Problemy Arktiki i Antarktiki.* Arctic and Antarctic Research. 2018, 64 (3): 337–343. [In Russian]. doi: 10.30758/0555-2648-2018-64-3-337-343

Поступила 14 мая 2018 г. *Принята к печати 6 августа 2018 г.*

Ключевые слова: гиперболическая система, коэффициент трения, пористая среда, разностная схема.

Статья посвящена вопросу распространения упругих поперечных колебаний в двухфазной среде, состоящей из воды и льда (лед, пропитанный водой). Если рассматривать лед как некую пористую однородную среду с постоянной парциальной плотностью, то становится возможной постановка задач теории фильтрации для среды вода–лед. В данной работе рассматривается одна из возможных постановок прямой задачи, моделирующей распространение сигнала в этой среде. Численно решена начально-краевая задача для одномерной нелинейной системы уравнений пороупругости на основе явной разностной схемы. Представлена серия численных расчетов для пробной модели сред.

ВВЕДЕНИЕ

Для изучения масштабных процессов, происходящих в различных регионах Арктики и Антарктики, необходимы общие физические модели, описывающие характерные для этих регионов среды.

Данная статья посвящена моделированию распространения поперечных колебаний в мелком рыхлом льду, пропитанном водой, с использованием модели теории фильтрации.

Задачи теории фильтрации возникают при изучении движения однородной жидкости в пористой среде. Под понятием «пористая среда» подразумевается среда, имеющая бесчисленное количество пустот различной величины и формы, образующих «поровое пространство». Каждая такая пора соединена узкими каналами с другими, образуя полностью сообщающуюся между собой сквозными каналами сложную систему отверстий-ячеек. Примерами пористых сред служат несцементированные пески, сцементированные пески, тонкозернистые почвы и т.д. В данной работе в качестве пористой среды рассматриваются не соединенные между собой частицы мелкого рыхлого льда (шуги).

При математическом моделировании процессов тепломассопереноса в изотропных пористых средах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] применяют различные модели, основанные на общих физических законах массы, импульса и энергии в упруго-деформируемой пористой среде. В большинстве работ [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] в качестве такого закона рассматривают закон Дарси в гидравлическом приближении. В модели Дарси, как правило, влиянием инерционных эффектов на режимы течения и теплопереноса в пористой среде пренебрегают. Однако известно, что в случае интенсивного течения или при наличии высокопористого материала наблюдаются отклонения от линейного закона фильтрации вследствие существенного влияния инерционных эффектов, которые, в частности, приводят к отрыву потока от поверхности твердого скелета.

Теоретически было установлено, что применимость модели Дарси ограничивается малыми значениями модифицированного числа Рейнольдса [4, 6, 11]. В работах В.Н. Доровского и А.Н. Блохина [3, 12] при построении математической модели движения жидкости через упруго-деформируемую пористую среду не предполагается выполнение закона Дарси, а он получен как следствие в одном предельном случае.

Целью данной работы было численное моделирование распространения нелинейных поперечных волн в случае диссипации энергии, обусловленной коэффициентом межкомпонентного трения. Была численно реализована явная разностная схема для данной задачи. Приведены результаты тестовых расчетов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Распространение поперечных колебаний в пористой среде моделируется следующей начально-краевой задачей для нелинейной системы уравнений пороупругости [13–15]:

$$\rho_s u_{tt} = (\mu(u_x)u_x)_x - \rho_l^2((u-v)\chi(u-v))_t, x \in (0,L), t \in (0,T), \quad (1)$$

$$\rho_l v_t = \rho_l^2(u-v)\chi(u-v), x \in (0,L), t \in (0,T), \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x), x \in (0,L), \quad (3)$$

$$v|_{t=0} = 0, x \in (0,L), \quad (4)$$

$$u_x|_{x=L} = 0, t \in (0,T), \quad (5)$$

$$u|_{x=0} = f(t), t \in (0,T). \quad (6)$$

Здесь u и v — скорости упругого пористого тела с постоянной парциальной плотностью $\rho_s = \rho_s^f(1-d_0)$ и жидкости с постоянной парциальной плотностью $\rho_l = \rho_l^f d_0$ соответственно; d_0 — пористость; $u_t = \partial u/\partial t$, $f:[0,T] \to R, u_0:[0,L] \to R, u_1:[0,L] \to R, \rho_s^f, \rho_l^f$ — физические плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно; $\mu(u_x)$ — модуль сдвига упругого пористого тела, трижды непрерывно-дифференцируемая положительная функция; $\chi(u-v)$ — коэффициент межфазного трения, дважды непрерывно-дифференцируемая положительная функция.

Нелинейное волновое уравнение вида (1) (в обратимом приближении, $\chi \equiv 0$) возникает во многих задачах. Например, в случае колебаний струны с упругим коэффициентом, зависящим от деформации. Второе слагаемое правой части уравнения (1) выражает затухание колебаний в результате трения жидкости и твердого тела. Во многих моделях механики пористых сред, учитывающих диссипацию энергии (рассеивание), коэффициент трения (проницаемость) является функцией разности скоростей [1, 2]. Второе уравнение описывает закон сохранения импульса для жидкой фазы среды.

Ранее были доказаны существование и единственность классического решения задачи (1) – (6), найдены оценки устойчивости решения данной задачи [14].

Данная статья посвящена численному решению начально-краевой задачи (1) – (6) для постоянных коэффициентов, соответствующих начальным стадиям ледообразования: плотность воды $\rho_l^f = 1030$ кг/м^3, плотность льда $\rho_s^f = 922$ кг/м^3, модуль сдвига $\mu = 3 \cdot 10^9$. Построены решения для различных коэффициентов межфазного трения χ и пористости среды d_0.

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПОРОУПРУГОСТИ

Для численного решения начально-краевой задачи (1) – (6) мы использовали разностную схему второго порядка точности по t с шагом τ и по x с шагом h аппроксимации для уравнения (1), а для аппроксимации уравнения (2) разностную схему первого порядка точности по t [16, 17]:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau^2}(u_j^{i+1} - 2u_j^i + u_j^{i-1}) = \frac{1}{2h^2\rho_s}((\mu_{j+1}^{i-1} + \mu_j^{i-1})(u_{j+1}^i - u_j^i) - \\ -(\mu_j^{i-1} + \mu_{j-1}^{i-1})(u_j^i - u_{j-1}^i)) - \frac{1}{\tau\rho_s}\rho_l^2((u_j^i - v_j^i)\chi_j^i - (u_j^{i-1} - v_j^{i-1})\chi_j^{i-1}),\end{aligned} \quad (7)$$

$$v_j^{i+1} = \rho_l \tau (u_j^{i+1} - v_j^{i+1}) \chi_j^i + v_j^i,\ i = 0 \ldots N,\ j = 0 \ldots M. \quad (8)$$

Начальные и граничные условия аппроксимировали с первым порядком точности

$$u_j^0 = 0, \frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} = 0,\ j = 0 \ldots M, \quad (9)$$

$$v_j^0 = 0,\ j = 0 \ldots M, \quad (10)$$

$$u_0^i = f(t),\ u_M^i = 0,\ i = 0 \ldots N. \quad (11)$$

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже представлены результаты моделирования распространения сигналов во льду, перемешанном с водой.

На рис. 1, 2 приведены графики изменения скорости колебания упругого тела по времени на различных расстояниях от источника для следующих параметров: плотность воды $\rho_l^f = 1030$ кг/м^3, плотность льда $\rho_s^f = 922$ кг/м^3, модуль сдвига $\mu = 3 \cdot 10^9$.

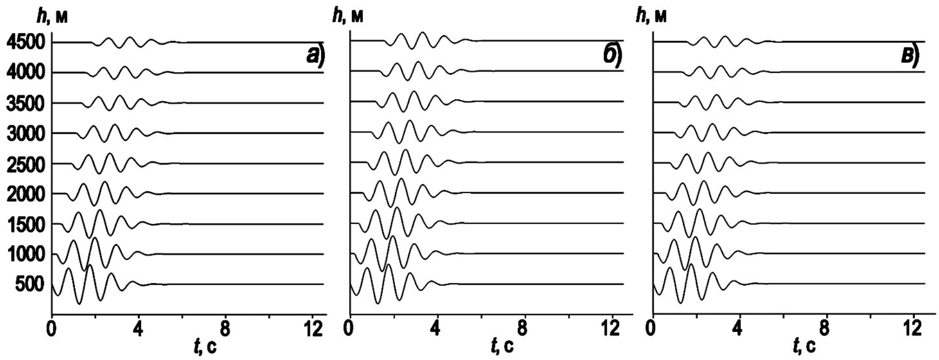

Рис. 1. Распространение сигнала в виде импульса Пузырева в средах с пористостью $d_0 = 0{,}5$ и различными коэффициентами межфазного трения $\chi = 0{,}002$ (*а*), $\chi = 0{,}003$ (*б*), $\chi = 0{,}004$ (*в*)

Fig. 1. Propagation of the signal in the form of a Puzyrev pulse in media with porosity $d_0 = 0{,}5$ and various coefficients of interfacial friction $\chi = 0{,}002$ (*а*), $\chi = 0{,}003$ (*б*), $\chi = 0{,}004$ (*в*)

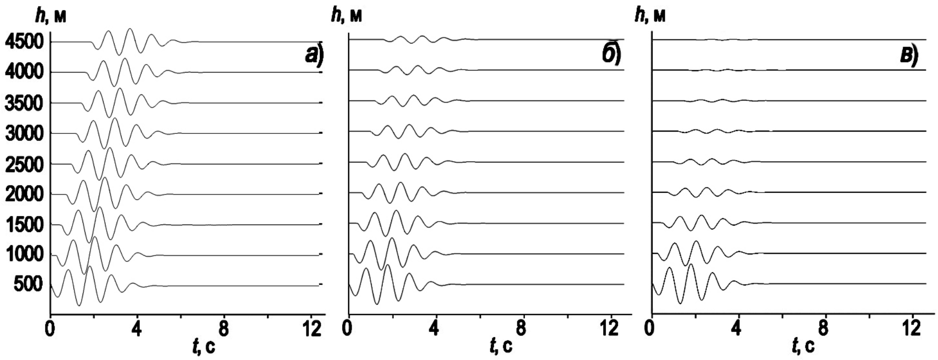

Рис. 2. Распространение сигнала в виде импульса Пузырева в средах с пористостью $d_0 = 0{,}3$ и различными коэффициентами межфазного трения $\chi = 0{,}003$ (*а*), $\chi = 0{,}01$ (*б*), $\chi = 0{,}03$ (*в*)

Fig. 2. Propagation of the signal in the form of a Puzyrev pulse in media with porosity $d_0 = 0{,}3$ and various coefficients of interfacial friction $\chi = 0{,}003$ (*а*), $\chi = 0{,}01$ (*б*), $\chi = 0{,}03$ (*в*)

Временной сигнал в источниках был задан в виде импульса Пузырева:

$$f(t) = exp(-(2\pi f_0(t-t_0)^2)/\gamma^2)sin(2\pi f_0(t-t_0)), \tag{12}$$

где $\gamma = 4$, $f_0 = 1$ Гц, $t_0 = 1{,}5$ с.

На графиках видно затухание амплитуд колебаний с увеличением расстояния от источника.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассматривался вопрос применимости уравнений теории фильтрации к смешанным средам, состоящим из воды и льда. В зависимости от выбираемых коэффициентов пористости и межфазного трения подбираются параметры среды, соответствующие различным стадиям ледообразования. В численных примерах рассматривались параметры, соответствующие шуге. Пористость — 0,3–0,5. Коэффициент трения получен из формулы для ламинарного потока при Re < 2300 (Re — число Рейнольдса): $\chi = 64/Re$, что соответствует значениям $\chi = 0{,}01$–$0{,}04$. Вопрос подбора коэффициентов остается открытым и, вероятно, должен решаться путем получения экспериментальных данных для каждого типа среды. Также стоит отметить, что в общем случае коэффициенты трения и модуль сдвига являются функциями от скоростей упругого тела и жидкости.

Задача может быть распространена на случай трехмерной среды повторением уравнений (1) – (6) для всех компонентов векторов скоростей. Модель может быть уточнена путем включения в рассмотрение факторов трехмерной деформации среды.

В уравнениях (1) – (6) жидкость движется вследствие колебания твердого тела. Поэтому, при стремлении коэффициента пористости к нулю, уравнение (1) преобразуется в уравнение колебания упругого тела (льда), однако предельный переход при стремлении коэффициента пористости к единице не приводит к задаче о колебании жидкости. Физическим ограничением для применения данной модели является необходимость выполнения условия соединения друг с другом мелких элементов льда так, чтобы жидкость двигалась по капиллярам, возникающим между частицами льда, а не наоборот — элементы льда плавают в воде. Таким условиям отвечает шуга, которой соответствуют значения коэффициента пористости от 0,3 до 0,5. Корректность задачи сохраняется при переходе к сплошному льду, уравнение (1) преобразуется в уравнение колебания упругого тела.

Результатом данной работы является пример применения теории фильтрации для моделирования распространения волновых колебаний в водно-ледовых средах. С помощью данного подхода возможно моделирование распространения и диссипации волновых процессов (сейсмических, акустических волн и т.п.) в областях припайного льда и льдов начальных стадий ледообразования. Также при некоторых модификациях данной модели возможно ее применение к изучению вопроса распространения колебаний, вызванных морским волнением во льдах начальных стадий ледообразования.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00120.

Acknowledgments. The reported study was funded by RFBR according to the research project No. 18-31-00120.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Френкель Я.И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Известия АН СССР. Сер. география и геофизика. 1944. Т. 8. № 4. С. 133–146.

2. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves influid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // J. Acoustical Society of America. 1956. V. 28. P. 168–178.

3. *Доровский В.Н.* Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. № 7. С. 39–45.

4. *Bejan A.* Convection heat transfer. New Jersey: John Wiley Sons, 2004. 694 с.

5. *Nield D.A., Bejan A.* Convection in porous media. NewYork: Springer, 2006. 640 с.

6. *Маскет М.* Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 628 с.

7. *Шейдеггер А.Э.* Физика течения жидкостей через пористые среды. М.; Ижевск: Институт компью-терных исследований, 2008. 254 с.

8. *Alhashash A., Saleh H., Hashim I.* Effect of conduction in bottom wall on Benard convection in a porousenclosure with localized heating and lateral cooling // Transport in Porous Media. 2013. V. 96. P. 305–318.

9. *Misirlioglu A., Baytas A.C., Pop I.* Natural convection inside an inclined wavy enclosure filled with aporous medium // Transport in Porous Media. 2006. V. 64. P. 229–246.

10. *Saleh H., Hashim I.* Conjugate natural convection in a porous enclosure with non-uniform heat generation // Transport in Porous Media. 2012. V. 94. P. 759–774.

11. *Bear J.* Dynamics of fluids in porous media. Amsterdam: Elsevier, 1972. 764 с.

12. *Blokhin A.M., Dorovsky V. N.* Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. New York: Nova Science, 1995. 192 с.

13. *Имомназаров Х.Х., Коробов П.В.* Одномерная прямая и обратная задача для квазилинейной системы пороупругости // Тезисы Международной научной конференции «Методы создания, исследования и идентификации математических моделей». Новосибирск, 2013. С. 38.

REFERENCES

1. *Frenkel' Ia.I.* To the theory of seismic and seismoelectric phenomena in moist soil. *Izvestiia AN SSSR. Ser. geografiia i geofizika.* Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Series geography and geophysics, 1944, 8, 4: 133–146. [In Russian].

2. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves influid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. J. Acoustical Society of America. 1956, 28: 168–178.

3. *Dorovskii V.N.* The Continuous Theory of Filtration. *Geologiia i geofizika.* Geology and geophysics. 1989, 7: 39–45. [In Russian].

4. *Bejan A.* Convection heat transfer. New Jersey: John Wiley Sons, 2004: 694 p.

5. *Nield D.A., Bejan A.* Convection in porous media. New York: Springer, 2006: 640 p.

6. *Masket M. Techenie odnorodnykh zhidkostei v poristoi srede.* Flow of homogeneous fluids in a porous medium. Moscow; Izhevsk: Institute of Computer Science research, 2004: 628 p. [In Russian].

7. S*heidegger A.E. Fizika techeniia zhidkostei cherez poristye sredy*. Physics of the flow of liquids through porous media. Moscow.; Izhevsk: Institute of Computer Science research, 2008: 254 p. [In Russian].

8. *Alhashash A., Saleh H., Hashim I.* Effect of conduction in bottom wall on Benard convection in a porousenclosure with localized heating and lateral cooling. Transport in Porous Media. 2013, 96: 305–318.

9. *Misirlioglu A., Baytas A.C., Pop I.* Natural convection inside an inclined wavy enclosure filled with aporous medium. Transport in Porous Media. 2006, 64: 229–246.

10. *Saleh H., Hashim I.* Conjugate natural convection in a porous enclosure with non-uniform heat generation. Transport in Porous Media. 2012, 94: 759–774.

11. *Bear J.* Dynamics of fluids in porous media. Amsterdam: Elsevier, 1972: 764 p.

12. *Blokhin A. M., Dorovsky V. N.* Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. New York: Nova Science, 1995: 192 p.

13. *Imomnazarov Kh.Kh., Korobov P.V. Odnomernaia priamaia i obratnaia zadacha dlia kvazilineinoi sistemy porouprugosti.* One-

14. *Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Коробов П.В., Холмуродов А.Э.* Прямая и обратная задача для нелинейных одномерных уравнений пороупругости // Доклады Академии наук. 2014. Т. 455. № 6. С. 640–642.

15. *Имомназаров Х.Х., Коробов П.В.* Численное решение одной начально-краевой задачи для нелинейной одномерной системы пороупругости // Тезисы V международной молодежной научной школы-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2013. С. 41.

16. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

17. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 415 с.

dimensional direct and inverse problem for a quasilinear system of poroelasticity. *Tezisy Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii "Metody sozdaniia, issledovaniia i identifikatsii matematicheskikh modelei"*. Proc. of the International Scientific Conference "Methods for creating, researching and identifying mathematical models". Novosibirsk, 2013: 38. [In Russian].

14. I*momnazarov Kh.Kh., Imomnazarov Sh.Kh., Korobov P.V., Kholmurodov A.E.* Direct and inverse problem for nonlinear one-dimensional equations of poroelasticity. *Doklady Akademii Nauk*. Proc. of the Academy of Sciences, 2014, 455, 6: 640–642. [In Russian].

15. *Imomnazarov Kh.Kh., Korobov P.V. Chislennoe reshenie odnoi nachal'no-kraevoi zadachi dlia nelineinoi odnomernoi sistemy porouprugosti.* Numerical solution of one initial-boundary value problem for a nonlinear one-dimensional system of poroelasticity. *Tezisy V mezhdunarodnoi molodezhnoi nauchnoi shkoly-konferentsii "Teoriia i chislennye metody resheniia obratnykh i nekorrektnykh zadach"*. Proc. of the V international youth scientific school-conference "Theory and numerical methods for solving inverse and ill-posed problems". Novosibirsk: Siberian Scientific Publishing House, 2013: 41. [In Russian].

16. *Samarskii A.A., Gulin A.V. Chislennye metody.* Numerical methods. Moscow: Science, 1989: 432 p. [In Russian].

17. *Samarskii A.A., Gulin A.V. Ustoichivost' raznostnykh skhem.* Stability of difference schemes. Moscow: Science, 1973: 415 p. [In Russian].